

* 研究简讯 *

一类变分条件下微分方程解的有界性*

刘坤会**

北方交通大学理学院, 北京 100044

摘要 讨论了在某种变分条件下一类微分方程解的有界性, 指出了它在随机控制理论中的应用.

关键词 微分方程 随机控制 变分条件

变分条件下的方程问题也称为变分方程或变分不等式问题.

在很多情况下, 需研究变分条件下微分方程解的有界性问题. 在脉冲型随机控制问题的研究中, 需讨论扩散方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + \mu(x)v'(x) + h(x) = \lambda \quad (1)$$

在满足变分条件

$$v(x + \xi) + B(\xi) \geq v(x), \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R} \quad (2)$$

下 $v'(x)$ 的有界性问题. 其中 $\sigma(x), \mu(x)$ 为符合某些条件的扩散系数与漂移系数; $B(\xi)$ 当 $|\xi|$ 增时非降, 且满足一些其他条件.

为叙述方便, 先讨论右半直线上的方程问题. 首先假定 a, λ 为实常数且 $\lambda > 0$, 再设

(A1) $h(x)$ 为 $(a, \infty]$ 上的非负连续非降函数;

(A2) $B(\xi)$ 为 $(-\infty, 0]$ 上的正值连续函数;

(A3) $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, \infty), k$ 为正常数, $\sigma(x)$ 在 $[a, \infty)$ 不取 0 值.

以 $U(x)$ 表 $v'(x)$, 在右半直线上方程(1)变为

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U'(x) + \mu(x)U(x) + h(x) = \lambda, \quad x \geq a. \quad (3)$$

此时条件(2)换为

$$\int_p^q U(x)dx \leq B(p - q), \quad \forall a \leq p < q < \infty. \quad (4)$$

在控制问题中, 当有 $x_0 > a$ 使得方程(3)的解在此点的值 $U(x_0) = 0$, 在构造变分方程解时只须延拓函数值使在 $[x_0, \infty)$ 中为零, 这是一个便于处理的情况. 此外, 在随机控制中只考虑

2000-11-08 收稿, 2001-01-23 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19671004)

** E-mail: lkhww@263.net

$U(x)$ 在 a 的右邻域为正的情况,因此我们只考虑

$$U(x) > 0, \forall x \geq a \quad (5)$$

时的情况. 在此情况下我们有

定理 1 设条件(A1),(A2),(A3)满足,且 $\lambda \neq \sup_{x \geq a} h(x)$,若方程(3)的解 $U(x)$ 满足(4)、(5),则存在常数 $M > 0$,使得 $\forall x \geq a, U(x) \leq M$.

转化为扩散方程的形式. 由定理 1 我们可以推知

定理 1' 设条件(A1),(A2),(A3)满足且 $\lambda \neq \sup_{x \geq a} h(x)$,若扩散方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + \mu(x)v'(x) + h(x) = \lambda, x \geq a$$

之解 $v(x)$ 满足

$$v'(x) > 0, \forall x \geq a, \quad (6)$$

$$v(q) - v(p) \leq B(p - q), a \leq p < q < \infty, \quad (7)$$

则 $v'(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上有界.

再讨论左半直线上的情况,为此设 b, λ 为实常数且 $\lambda > 0$,再设

(A4) $h(x)$ 为 $(-\infty, b]$ 上的非负连续非增函数;

(A5) $B(\xi)$ 为 $[0, \infty)$ 上的正值连续函数;

(A6) $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in (-\infty, b], k$ 为正常数;
 $\sigma(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上不取 0 值.

利用定理 1 或定理 1'的结论,我们可证

定理 2 设条件(A4),(A5),(A6)满足且 $\lambda \neq \sup_{x \leq b} h(x)$,若扩散方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + \mu(x)v'(x) + h(x) = \lambda, x \leq b \quad (8)$$

之解 $v(x)$ 满足

$$v'(x) < 0, \forall x \leq b, \quad (9)$$

$$v(q) - v(p) \geq -B(q - p), -\infty < p < q \leq b, \quad (10)$$

则 $v'(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上有界.

下面再讨论全直线上相应的方程问题.

设 a, b 和 λ 为实常数, $-\infty < b < a < \infty, \lambda > 0$. 再假定

(A7) $h(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数且在 $(-\infty, b]$ 上非增,在 $[a, \infty)$ 上非降;

(A8) $B(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负,在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, \infty)$ 上为正值连续函数, $B_-(0) = \lim_{\xi \uparrow 0} B(\xi)$ 及 $B_+(0) = \lim_{\xi \downarrow 0} B(\xi)$ 存在且 $0 < B_-(0) < \infty, 0 < B_+(0) < \infty$;

(A9) $|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, k$ 为正常数且 $\sigma(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不为 0.

由定理 1'和定理 2 我们可证

定理 3 设条件(A7),(A8)及(A9)满足, $\lambda \neq \sup_{x \geq a} h(x)$ 且 $\lambda \neq \sup_{x \leq b} h(x)$,若扩散方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)v''(x) + \mu(x)v'(x) + h(x) = \lambda, x \in \mathbb{R} \quad (11)$$

的解函数 $v(x)$ 满足

$$v'(x) > 0, \forall x \geq a \text{ 且 } v'(x) < 0, \forall x \leq b, \quad (12)$$

$$v(x + \xi) + B(\xi) \geq v(x), \forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

则 $v'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

下面再简单介绍一下定理3在随机控制中的应用.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ 为 $\mathcal{F}$ 的非降子 σ -域族, $W_t, t \geq 0$ 为关于 $\mathcal{F}_t$ 的 Wiener 过程. 若 (A9) 成立, 则 $\forall x \in \mathbb{R}$ 存在唯一的 $\mathcal{F}_t$ 适应连续过程 $X_t, t \geq 0$ 满足方程

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

另一方面, 当 (A7), (A8), (A9) 满足时, 若方程 (11) 的解 $v(\cdot)$ 满足方程 (12), (13), 则由定理3知 $v'(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 又由 Itô 公式, $\forall T$ 为正常数有

$$v(X_T) - v(x) = \int_0^T \sigma(X_t) v'(X_t) dW_t + \int_0^T \mu(X_t) v'(X_t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2(X_t) v''(X_t) dt, \text{ a.s.} \quad (15)$$

当 $\sigma(\cdot)$ 有界时, 因 $v'(\cdot)$ 亦有界, 故推知有 $E \int_0^T \sigma(X_t) v'(X_t) dW_t = 0$, 再由 (11) 式推知有

$$E \int_0^T h(X_t) dt = \lambda T + v(x) - E v(X_T). \quad (16)$$

再由 (12) 式易知 $v(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上负向有界, 故有

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T h(X_t) dt \leq \lambda. \quad (17)$$

(16), (17) 式在随机控制的研究中有重要意义.

此外, 本文定理1'及定理1, 2, 3从新的角度提出了微分方程解(或解的导函数)的有界性问题, 它们的结论揭示了扩散方程系数的 Lipschitz 连续性在某些变分条件下与方程解的导函数有界性之间的联系.

与本文有关的资料可参看文献[1~4].

参 考 文 献

- 1 刘坤会. Richard 模型的平均期望费用问题. 数学学报, 1988, 31(6): 786
- 2 刘坤会. 局部区域的最佳脉冲随机控制. 数学学报, 1992, 35(3): 289
- 3 刘坤会. 一类对称的平稳型随机控制问题. 应用数学学报, 1992, 15(3): 428
- 4 孙世良, 等. 一类脉冲最佳随机控制之研究. 数学学报, 1998, 41(1): 191